4.4 EGALISATION

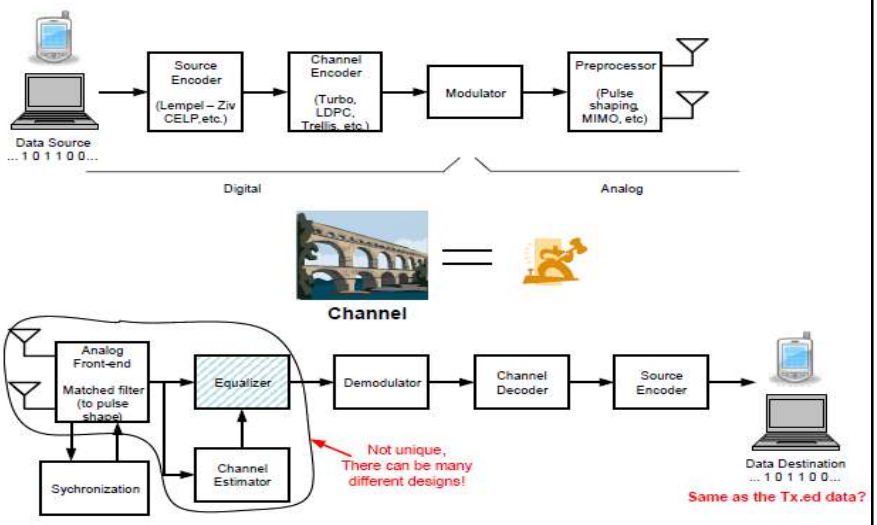
Egalisation: Introduction

Egalisation

=

Chaque opération pour minimiser
les interférences ISI (effet du canal).

4.4 Egalisation

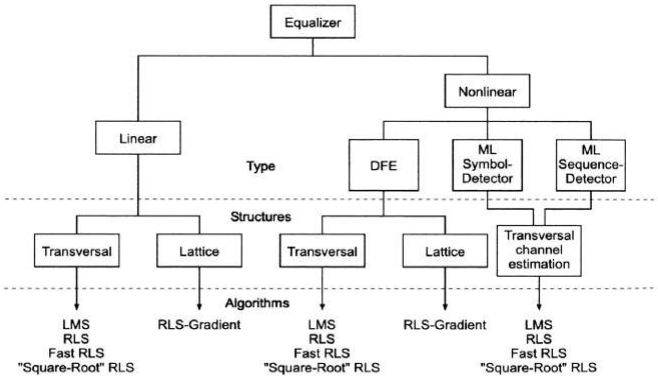


4.4 Egalisation

- ZF: Zero Forcing Equalizer
- MMSE: Minimum Mean Square Error Equalizer
- DFE: Decision Feedback Equalizer, and
- FSE: Fractionally Spaced Equalizer.

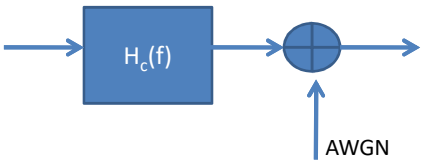
Equalizers

- Equalizers can be classified in several different ways.



4.4 Egalisation 3/16

- Pour la plus part des canaux physiques (ex: ligne téléphonique), ont une **bande limitée**, **mais** ils présentent aussi des **distorsions** dans ses bandes passantes.
- Ces types de canaux peuvent être modélisés par les filtres **LTI** suivi d'une **source AWGN**:

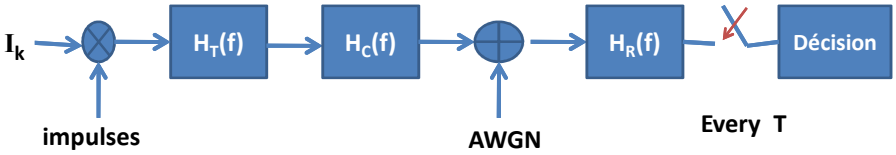


Modèle d'un canal dispersif

42

4.4 Egalisation 4/16

- Généralement, **ISI** est souvent **présente**.
- Dans un système de communication utilisant une **modulation linéaire** (BPSK), par un **canal dispersif**, le **système globale** peut être representer de cette façon:



Modèle de communication à temps continu sur le canal dispersive

- $\{ I_k \}$ Séquence de symboles d'information
- **$H_T(f)$:** fonction de transfert du **filtre d'émission** (*pulse shaping*: la mise en forme de l'impulsion)
- **$H_C(f)$** fonction de transfert du **canal dispersif**
- **$H_R(f)$** fonction de transfert du **filtre de réception**

43

4.4 Egalisation 5/16

- On va appliquer la **condition de Nyquist** pour éviter ISI (ISI-free) à notre système considéré:
- Soit: $X(f) = H_T(f).H_C(f).H_R(f)$
- La **condition de Nyquist** c'est que **le spectre *X(f)* doit être constant** (flat):
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T}) = T$$
- La méthode pour **satisfaire la condition de Nyquist** est de remplacer le **filtre de réception** par un **filtre adapté (MF),** c'est-à-dire: $H_R(f) = H^*_T(f).H^*_C(f).$

et **choisir** le **filtre de transmission** en respectant l'équation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T}) = T$$

44

4.4 Egalisation 6/16

- L'inconvénient de la méthode ''**mise en forme de l'impulsion**'': elle est en générale très **difficile de réaliser pratiquement un filtre analogique** approprié pour **$H_T(f)$** et **$H_R(f)$**.
- Et en plus, on doit connaître déjà la **réponse du canal $H_C(f)$** pour réaliser les filtres de **transmission** et **réception**.

Solution possible: fixer (le plus simple) le **filtre de transmission** et choisir le **filtre de réception $H_R(f)$** en satisfaisant la condition:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T}) = T$$

- **Attention!!:** la même chose pour la méthode précédente, il est aussi difficile de réaliser le filtre analogique **$H_R(f)$ pour éliminer ISI.**

- **Solution:** prendre des **échantillons** aux intervalles **T,** et utiliser un **filtre numérique**, appelé **EGALISEUR.**

45

4.4 Egalisation 7/16

- **L'avantage principale** de cette approche est que c'est facile de **réaliser** le **filtre numérique et de le modifier** pour différentes situations (différents comportement des canaux).
- **L'objectif** c'est donc de **concevoir un égaliseur** pouvant **éliminer ISI**. **Comment???**
- **Solution:** passage d'un modèle de (S).Comm à **temps continu** vers un (S).Comm à **temps discret.**
- **Les étapes** ((S).Com t.c vers (S) à t.d):
- Au lieu d'utiliser le **bruit blanc gaussien AWGN avant le filtre** de réception **$H_R(f)$** , on va utiliser le **bruit gaussien coloré équivalent** ajouté après le filtre **$H_R(f)$.** C'est la **sortie** du **$H_R(f)$** due au bruit **AWGN.**
- **Remarque : Schéma équivalent du système , voir *slide* suivante**

46

4.4 Egalisation 8/16

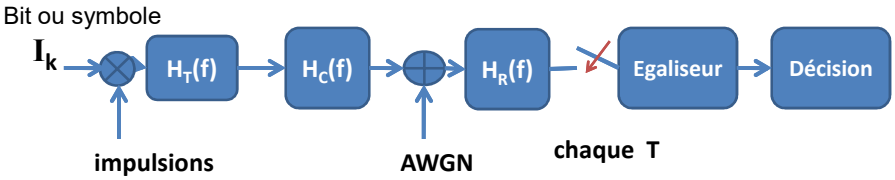


Figure 1- Système de communication avec Egaliseur

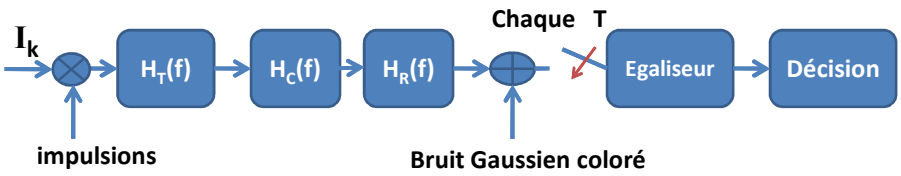


Figure 2- Système de communication Equivalent avec bruit gaussien coloré

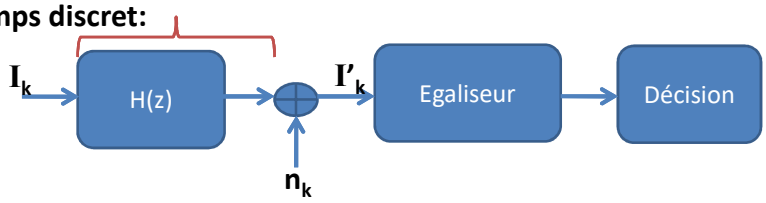
47

4.4 Egalisation 9/16

- On sait que $H_T(f)$, $H_c(f)$ et $H_R(f)$ sont des **filtres LTI** → ils peuvent être **combinés et représentés** par un **filtre numérique LTI équivalent** : $H(z)$, dont la **réponse impulsionnelle** est :

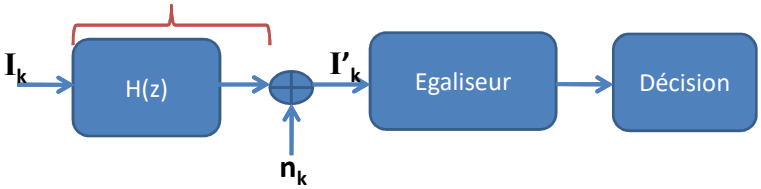
$$\{h_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$$

- On aura comme résultat le **Modèle d'un filtre linéaire à temps discret:**



Modèle équivalent d'(S) de communication à temps discret

4.4 Egalisation 10/16



Modèle équivalent d'(S) de communication à temps discret

$$I'_k = \sum_j I_j . h_{k-j} + n_k$$

$$= I_k . h_0 + \sum_{j \neq k} I_j . h_{k-j} + n_k$$

- Généralement, $h_j \neq 0$ pour $j \neq 0$ → **ISI** est **présent.**

- le **bruit** n_k ; **ensemble des échantillons** du **bruit gaussien colorés** (AWGN filtré par $H_R(f)$)

- $\{I_k\}$ Séquence de symboles d'information

4.4 Egalisation 12/16

- Généralement , un **égaliseur** est constitué de **deux éléments**:

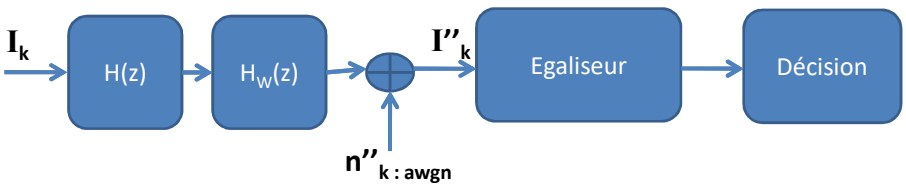
1. **Filtre numérique** de **blanchiment** $H_w(z)$
2. Circuit **égaliseur**.

- Donc le rôle de $H_w(z)$ est le **blanchiment du signal bruité**, de telle façon à ce que les **échantillons du bruit** soient **décorréles**.

50

4.4 Egalisation 13/16

- On rappelle que $H_w(z)$ dépend seulement de $H_R(f)$, et peut être déterminer () à partir de notre choix pour le filtre $H_R(f)$.
- A la **sortie** de $H_w(z)$, le **bruit** sera **blanc**, le système sera donc considéré comme étant un modèle équivalent à temps discret:

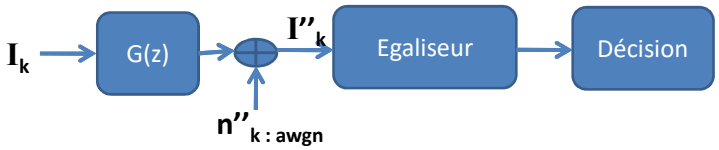


Modèle équivalent d'un (S) de communication à temps discret

51

4.4 Egalisation 14/16

- Soit: **G(z) = H(z).H_w(z)** → le système de communication, de la **source** jusqu'au **sortie du filtre de blanchiment** peut être représenté par un **modèle de filtre linéaire de blanchiment à temps discret:**



Modèle équivalent d'un filtre linéaire de blanchiment à temps discret

- La séquence de sortie I''_k est donnée par:

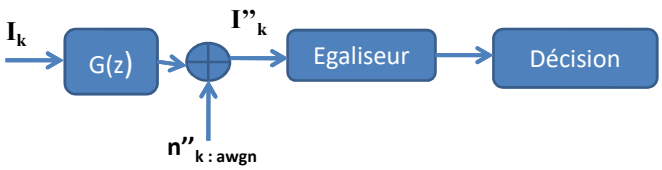
$$I''_k = \sum_j I_j \cdot g_{k-j} + n''_k$$

$$= I_k \cdot g_0 + \sum_{j \neq k} I_j \cdot g_{k-j} + n''_k$$

g(k): réponse impulsionnelle correspondante à la fonction de transfert **G(z)**.
n"$_k$: bruit AWGN

4.4 Egalisation 16/16

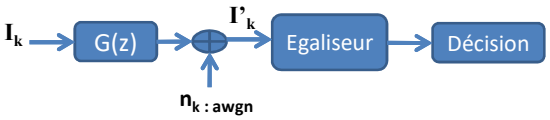
- **Circuit égaliseur** ou l'**Egaliseur** essaie **d'éliminer ISI** de la sortie de **G(z):**



Modèle équivalent d'un filtre linéaire de blanchissement à temps discret

4.4 Egaliseur Zero-Forcing 1/3

- **Conception d'un Egaliseur:**
  - On va utiliser le **filtre LTI** de **fonction de transfert $H_E(z)$** comme le **circuit d'égalisation**.
  - La méthode la plus simple **d'éliminer ISI (sans tenir compte de bruit)** est de choisir **$H_E(z)$** de telle façon à ce que l'égaliseur retourne la valeur : $\widehat{I_k} = I_k$, càd pour tout *k*, le bruit n'existe pas.



  - Ceci peut être réaliser en posant: $H_E(z) = 1/G(z)$
  - Cette méthode est appelée **Egalisation Zero-forcing**, puisque les **composantes ISI** sont **forcées** à prendre une **valeur nulle (zéro)**.

54

4.4 Egaliseur zero-forcing 2/3

- L'effet du **filtre égaliseur** (sans tenir een compte de bruit): pas pratique!!! (bruit toujours présent)
- **N.B:** même si les composantes **ISI** sont forcées à zéro, le filtre égaliseur **pourrait amplifier la puissance de bruit → erreurs → mauvais résultat**
- On choisit le filtre $H_T(f)$ et le filtre adapté **MF** comme filtre de réception, on aura donc: $H_R(f) = H_T^*(f).H_c^*(f)$
- Le **filtre numérique $H(z)$** est défini par: $H(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H_T(f-\frac{n}{T}).H_c(f-\frac{n}{T})|^2$
- Soit la **DSP** du **bruit gaussien coloré n_k**: $\Phi_{n_k}(e^{j2\pi fT}) = \frac{N_0}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H_T(f-\frac{n}{T}).H_c(f-\frac{n}{T})|^2$
- Le **filtre** de **blanchiment** du **bruit $H_w(z)$** peut être choisie: $H_w(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{\sqrt{H(e^{j2\pi fT})}}$
- Le **filtre numérique globale** est : $G(e^{j2\pi fT}) = H(e^{j2\pi fT}).H_w(e^{j2\pi fT}) = \sqrt{H(e^{j2\pi fT})}$
- On choisit le **filtre $H_E(z)$:** $H_E(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{G(e^{j2\pi fT})} = \frac{1}{\sqrt{H(e^{j2\pi fT})}}$

55

4.4 Egaliseur Zero-forcing 3/3

$$H_E(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{G(e^{j2\pi fT})} = \frac{1}{\sqrt{H(e^{j2\pi fT})}}$$

- **Filtre zero-forcing** inverse tout simplement l'effet de canal, les **symboles de sortie** sont **bien récupérés**.

56

4.5 Egaliseur MMSE 1/5

- **L'égaliseur ZF**, même si il arrive à **éliminer ISI,** il n'a pas une performance au niveau de SNR dans notre système de communication, parce qu'il ne **tient pas** en compte **le bruit.**
- L'égaliseur qui tient en compte l'effet de bruit c'est l **'égaliseur MMSE:** Minimum de l'erreur quadratique moyenne, il est basé sur le critère **MSE** (erreur quadratique moyenne)
- **L'égaliseur MMSE** est une égaliseur **linéaire**.
- Supposons $\mathbf{I_k}$ est un processus stationnaire au sens large **WSS**.
- On choisit l'égaliseur linéaire $\mathbf{H_E(z)}$ de telle façon à **minimiser l'erreur quadratique moyenne** (**MSE**) entre les symboles d'information originelles $\mathbf{I_k}$ et la sortie de l'égaliseur **MMSE** $\hat{I}_k$.

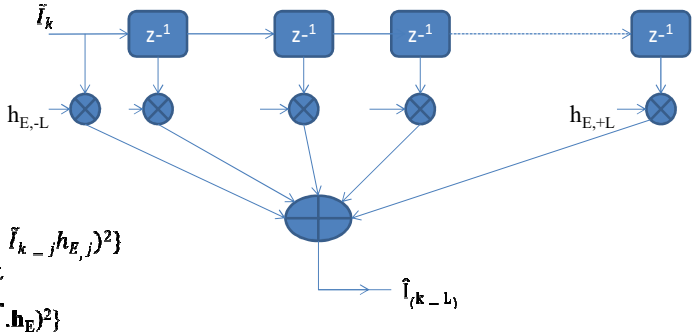
$$MSE = E\{e^2_k\} = E\{(I_k - \hat{I}_k)^2\}$$

57

4.5 Egaliseur MMSE 2/5

On utilise le filtre FIR comme étant un égaliseur MMSE

filtre d'ordre 2L+1



$$MSE = E\{(I_k - \sum_{j=-L}^{L} \tilde{I}_{k-j} h_{E,j})^2\}$$

$$MSE = E\{(I_k - \tilde{I}_k^T . \mathbf{h_E})^2\}$$

avec : $\tilde{I}_k = [\tilde{I}_{k+L}, ..., \tilde{I}_{k-L}]^T$ et $\mathbf{h_E} = [h_{E,-L}, ..., h_{E,L}]^T$

58

4.5 Egaliseur MMSE 3/5

- l'objectif est donc de bien choisir $\mathbf{h_{E,-L}}$,...,$\mathbf{h_{E,L}}$ de telle façon à minimiser l'erreur $\boldsymbol{MSE = E\{e_k^2\} = E\{(I_k - \hat{I}_k)^2\}}$
- C'est une fonction quadratique → dérivée par rapport à $\mathbf{h_{E,j}} = 0$ → pour chercher son minimum:

$$MSE = E\{(I_k - \tilde{I}_k^T . \mathbf{h_E})^2\} \qquad \boldsymbol{E\{\tilde{I}_k . (I_k - \tilde{I}_k^T . \mathbf{h_E})\} = 0}$$

Si on pose $\boldsymbol{R = E\{\tilde{I}_k . \tilde{I}_k^T\}}$ et $\boldsymbol{d = E\{I_k \tilde{I}_k\}}$, on aura: $\mathbf{R.h_E = d}$

- si on dispose des valeurs de **R** et **d** on trouvera l'égaliseur MMSE.

59

4.5 Egaliseur MMSE 4/5

- **Egaliseur MMSE** (algorithme itératif):
- **MSE** est une fonction **quadratique** → calculer le **gradient** par rapport à h_E: c'est-à-dire la **direction** de changer h_E pour avoir une **plus grande valeur de MSE**.
- **Le gradient = -2(d - R.h_E), pour minimiser MSE,** on change la direction de h_E dans la **direction opposée au gradient**. Cette méthode est appelé : ***steepest descent algorithm (algorithme à direction de descente)***
- Pour ***l'étape k,*** le vecteur $h_E(k)$ est ***:***

$$h_E(k) = h_E(k-1) + \mu \,.[d-R.h_E(k-1)]$$

avec μ est **le pas** (nombre constante positive) contrôlant la convergence de la solution optimale.

60